

第四章 数列

章末检测卷

题号	一	二	三	四	总分
得分					

测试建议用时:120 分钟 满分:150 分



本卷答题卡

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. (2022 山东东营期末) 已知数列 $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{2n-1}, \dots$, 则 $\sqrt{2023}$ 是这个数列的 ()

- A. 第 1 011 项 B. 第 1 012 项
C. 第 1 013 项 D. 第 1 014 项

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 + a_9 = a_3 + 8$, 则 $S_{15} =$ ()

- A. 60 B. 120 C. 160 D. 240

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都为正数, 且当 $n \geq 2$ 时, 有 $a_{n-1}a_{n+1} = e^{2n}$, 则数列 $\{\ln a_n\}$ 的前 20 项和为 ()

- A. 190 B. 210 C. 220 D. 420

4. (2022 江苏省苏州实验中学期末) 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 用数学归纳法证明

$f(n) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}$ 时, 假设当 $n = k (k \in \mathbb{N}^*)$ 时, 命题成立, 证明当 $n = k+1$ 时, 命题也成立, 需要用到的 $f(k+1)$ 与 $f(k)$ 之间的关系式是 ()

- A. $f(k+1) = f(k) + 3k - 5$
B. $f(k+1) = f(k) + 3k - 2$
C. $f(k+1) = f(k) + 3k + 1$
D. $f(k+1) = f(k) + 3k + 4$

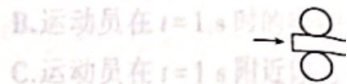
5. (2022 安徽师范大学附属中学模拟) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 且 $4a_5, a_3, 2a_4$ 成等差数列, 则正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 ()

- A. 31 B. $\frac{31}{32}$
C. $\frac{63}{32}$ D. 63

6. (2023 河北唐山期末) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+81}{n+3}$, 则使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数为 ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

7. (2023 河南联考) 如图, 有一半径 r 都是 $\frac{800}{\pi}$ mm, 面带从一



出, 每对轧辊都将面带的厚度

程中面带宽度不变, 且不考

一周在面带上压出一个疵点

疵点的间距 $L_k =$

A. $800 \times 0.2^{k-10}$ mm

C. $1\ 600 \times 0.8^k$ mm

8. (2023 云南曲靖市第一中学) 学的奠基者之一, 享有“数学

为高斯函数, 高斯函数 $f(x)$

数, 如 $[2.3] = 2, [-1.9] = -1$

$4a_n = 5a_{n+1}$, 若 $b_n = [\log_2 a_n]$

$[S_{2025}] =$

A. 2 023

C. 2 025

二、多项选择题(本题共 4 小

的选项中, 有多项符合题目

分, 有选错的得 0 分)

9. (2022 武汉华中师大一附

论中不恒成立的是

A. 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$

B. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_2 < 0$

C. 若 $a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$

D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

10. (2023 长春东北师范大学

4, 且满足 $2(n+1)a_n = na_{n+1}$

A. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列

B. $\{a_n\}$ 为递增数列

C. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$

D. $\left\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$

11. (2023 云南楚雄期末) 我

队列要素法等多种方法



四 总分

满分:150分

共40分在

本卷答题卡

$\sqrt{7}, 3, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{2n-1},$
 ()

2项
 4项
 $=a_3+8$, 则 $S_{15} =$ ()
 D.240

≥ 2 时, 有 $a_n \cdot a_{n+1} = e^{2n}$,
 ()
 D.420

\mathbb{N}^* , 用数学归纳法证明
 当 $n=k(k \in \mathbb{N}^*)$ 时, 命
 要用到的 $f(k+1)$ 与 $f(k)$
 ()

项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项
 数列 $\{a_n\}$ 的前6项和为
 ()

差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项
 整数的正整数 n 的个
 ()
 D.9

7. (2023 河南联考) 如图, 有一台擀面机共有 10 对轧辊, 所有轧辊的半径 r 都是 $\frac{800}{\pi}$ mm, 面带从一端输入, 经过各对轧辊逐步减薄后输出, 每对轧辊都将面带的厚度压缩为输入该对轧辊时的 0.8 (整个过程中面带宽度不变, 且不考虑损耗). 若第 k 对轧辊有缺陷, 每滚动一周在面带上压出一个斑点, 则在擀面机最终输出的面带上, 相邻斑点的间距 $L_k =$ ()



- A. $800 \times 0.2^{k-10}$ mm B. $1\ 600 \times 0.8^{k-10}$ mm
 C. $1\ 600 \times 0.8^k$ mm D. $1\ 600 \times 0.2^{k-10}$ mm
8. (2023 云南曲靖市第一中学期末) 高斯是德国著名数学家, 近代数学的奠基者之一, 享有“数学王子”的称号, 用他名字定义的函数称为高斯函数, 高斯函数 $f(x) = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[2.3] = 2, [-1.9] = -2$, 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} + 4a_n = 5a_{n+1}$, 若 $b_n = [\log_2 a_{n+1}]$, S_n 为数列 $\left\{\frac{8\ 100}{b_n \cdot b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和, 则 $[S_{2\ 025}] =$ ()
 A. 2 023 B. 2 024
 C. 2 025 D. 2 026

二、多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. (2022 武汉华中师大一附中模拟) 记数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中不恒成立的是 ()
 A. 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$
 B. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_2 < 0$
 C. 若 $a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
 D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

10. (2023 长春东北师范大学附属中学期末) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4, 且满足 $2(n+1)a_n = na_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 ()
 A. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列
 B. $\{a_n\}$ 为递增数列
 C. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n-1) \times 2^{n+2} + 4$
 D. $\left\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2+n}{2}$

11. (2023 云南楚雄期末) 我国在预测人口变化趋势上有直接推算法、队列要素法等多种方法, 直接推算法使用的公式是 $P_n = P_0(1+k)^n$

$(k > -1)$, 其中 P_n 为预测期人口, n 为预测期与初期人口增长率, n 为预测期与初期人口增长率, n 为预测期与初期人口增长率.

A. 若在某一时期内 $-1 < k < 0$, 则这时期人口增长率为负
 B. 若在某一时期内 $k > 0$, 则这时期人口增长率为正
 C. 若在某一时期内 $0 < k < 1$, 则这时期人口增长率为正
 D. 若在某一时期内 $k = 0$, 则这时期人口增长率为零

12. (2023 江苏盐城期末) 如图, 已知正三角形 ABC 各边的三等分点 D, E, F , 顺次连接 D, E, F 得到三角形 DEF , 再将三角形 DEF 的各边的三等分点 D', E', F' 顺次连接下去. 设正三角形 ABC 的边长为 a , 依次得到三角形 $DEF, D'E'F', \dots$ 的面积依次为 b_1, b_2, \dots



- A. 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为公比的等比数列
 B. 从正三角形 ABC 开始, 连续 3 次操作后, 得到的三角形 DEF 的面积是 $\frac{1}{4}$ 倍于 ABC 的面积
 C. 使得不等式 $b_n > \frac{1}{36}$ 成立的 n 的个数为 5
 D. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < \frac{3}{2}$

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 2n$, 则 $a_5 =$ _____.
 14. (2023 重庆市杨家坪中学阶段测试) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n$, 等差数列 $\{b_n\}$ 中, $b_4 + b_6 = 10$, 则 $b_5 =$ _____.
 15. (2022 广州模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $2S_9 - 3S_6 = 54$, 记 $b_n = \frac{S_n}{n}$, 则 b_n 的前 n 项和 $T_n =$ _____.
 16. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 且 $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$, 若 $(b_m - 27) = 2\ 019$, 则 m 的值为 _____.



对轧辊,所有轧辊的对轧辊逐步减薄后输轧辊时的0.8(整个过寸轧辊有缺陷,每滚动输出的面带上,相邻

$k-10$ mm

$k-10$ mm

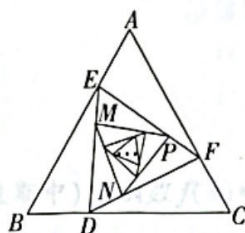
著名数学家,近代数学他名字定义的函数称示不超过 x 的最大整数足 $a_1=1, a_2=5, a_{n+2}+\frac{100}{b_{n+1}}$ 的前 n 项和,则

共20分.在每小题给出5分,部分选对的得2

是等差数列,下列结论

- ($k>-1$),其中 P_n 为预测期人口数, P_0 为初期人口数, k 为预测期内人口增长率, n 为预测期与初期间隔期数,则下列说法正确的有
- 若在某一时期内 $-1<k<0$,则这期间人口数呈下降趋势
 - 若在某一时期内 $k>0$,则这期间人口数呈上升趋势
 - 若在某一时期内 $0<k<1$,则这期间人口数摆动变化
 - 若在某一时期内 $k=0$,则这期间人口数不变

12. (2023 江苏盐城期末)如图,已知正三角形 ABC 的边长为 3,取正三角形 ABC 各边的三等分点 D, E, F 作第二个正三角形,然后取正三角形 DEF 的各边的三等分点 M, N, P 作正三角形,以此方法一直循环下去.设正三角形 ABC 的边长为 a_1 ,后续各正三角形的边长依次为 a_2, a_3, \dots, a_n ; 设 $\triangle AEF$ 的面积为 b_1 , $\triangle EMP$ 的面积为 b_2 ,后续各三角形的面积依次为 b_3, \dots, b_n ,则下列选项正确的是 ()



- 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为公比的等比数列
- 从正三角形 ABC 开始,连续 3 个正三角形面积之和为 $\frac{13\sqrt{3}}{4}$
- 使得不等式 $b_n > \frac{1}{36}$ 成立的 n 的最大值为 3
- 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < \frac{3}{2}$

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

- 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n - 90$, 则 $\frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_1 + a_2 + a_3}$ 的值为_____.
- (2023 重庆市杨家坪中学阶段练习)已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 \cdot a_8 = 4a_5$, 等差数列 $\{b_n\}$ 中, $b_4 + b_6 = a_5$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 9 项和 S_9 等于_____.
- (2022 广州模拟)已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $2S_9 - 3S_6 = 54$, 记 $b_n = \frac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.
- 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, 且 $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$), 若 $a_m + (b_m - 27) = 2019$, 则 m 的值为_____.



四、解答题(本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分) 已知数列 $\{a_n\}$, $x=(a_{n+1}, -2)$, $y=(1, a_n)$, 且 $x \perp y$, a_3+2 是 a_2 与 a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 13 + 2\log_2 a_n$, $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 求 S_n 的最大值.

五、(12分) (2022 湖北应城一...
S_n 数列 {a_n} 是递增的等比类
(1) 求数列 {a_n} 的通项公式
(2) 已知数列 {b_n} 的前 n 项和
 $T_n < \frac{1}{2}$



18. (12分) (2023 长沙市一中阶段练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n , 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $2S_n = a_{n+1} - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{\log_3(a_1 a_2 \dots a_n)}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求 $T_m = \left| b_1 - \frac{5}{4} \right| + \left| b_2 - \frac{5}{4} \right| + \dots + \left| b_m - \frac{5}{4} \right|$ ($m > 3$ 且 $m \in \mathbb{N}^*$) 的值(结果用 m 表示).

20. (12分) (2023 河南信阳期...
鉴》中研究过高阶等差数列
差数列, 称 $\{a_n\}$ 为二阶等差
(1) 记 $\{a_n\} = \{1, 2, 4, 7, \dots\}$
(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2^n}$, 求 $\{b_n\}$ 的



立写出文字说明、证明过程

$= (1, a_n)$, 且 $x \perp y, a_3 + 2$ 是

求 S_n 的最大值.

知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 前 n 项和 $S_n = a_{n+1} - 1$.

$\in \mathbb{N}^+$, 求 $T_m = \left| b_1 - \frac{5}{4} \right| +$

的值(结果用 m 表示).

19. (12分) (2022 湖北应城一中期末) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 a_4 = 32, a_2 + a_3 = 12$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n , 且 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{2n-1} \cdot \log_2 a_{2n+1}}$, 证明:

$$T_n < \frac{1}{2}.$$

20. (12分) (2023 河南信阳期末) 我国元代数学家朱世杰在《四元玉鉴》中研究过高阶等差数列问题, 如数列 $\{a_n\}$ 满足 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等差数列, 称 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列. 已知二阶等差数列 $1, 2, 4, 7, \dots$

(1) 记 $\{a_n\} = \{1, 2, 4, 7, \dots\}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2^n}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分) (2022 海口期末) 在① $b_n =$

条件中任选一个, 补充在下面的问

问题: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\underline{\hspace{2cm}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n \leq n$ 成立的 n 的最小值; 若 $\underline{\hspace{2cm}}$ 成立的 n 的最小值. (注: 如果选一个解答计分)

22. (12分) (2022 山东东营期末) 设 S_n

$a_1 = 1$, 且满足 $S_n = n^2 a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和等于 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n .



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 12$.

证明: $\frac{1}{a_{2n-1} \cdot \log_2 a_{2n+1}}$

家朱世杰在《四元玉
满足 $|a_{n+1} - a_n|$ 为等
差数列 $1, 2, 4, 7, \dots$
式;

21. (12 分) (2022 海口期末) 在① $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, ② $b_n = (\sqrt{2})^{n-1} + n$ 这两个

条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答.

问题: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且 $a_1, 9, a_{13}$ 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 _____, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 若选择条件①, 求使 $45T_n \leq n$ 成立的 n 的最小值; 若选择条件②, 求使 $T_n - 12 \geq 2b_n$ 成立的 n 的最小值. (注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分)

22. (12 分) (2022 山东东营期末) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知

$a_1 = 1$, 且满足 $S_n = n^2 a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和等于 $\frac{1}{a_n}$, $c_n = (-1)^{b_n} \cdot b_{2n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n .



猜想:当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(n) = n^2$, (6分)
 证明:当 $n=1$ 时, $f(1) = 1$, 等式成立, (7分)
 假设当 $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $f(k) = k^2$, (8分)
 当 $n=k+1$ 时, $f(k+1) = f(k) + f(1) + 2k = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$,
 即 $n=k+1$ 时, 等式也成立, (9分)
 由数学归纳法可知当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(n) = n^2$. (10分)

第四章 数列

章末检测卷

答案速查	题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	答案	B	B	B	C	C	C	B	B	ACD	BCD	ABD	ABD

一、单项选择题

1. B 由数列 $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{2n-1}, \dots$, 可得该数列的第 n 项 $a_n = \sqrt{2n-1}$,

令 $a_n = \sqrt{2n-1} = \sqrt{2023}$, 解得 $n = 1012$, 所以 $\sqrt{2023}$ 是这个数列的第 1012 项. 故选 B.

2. B 由等差数列的性质可知 $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$, 又 $a_2 + a_9 = a_3 + 8$, 所以 $a_8 = 8$,

故 $S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15 \times 2a_8}{2} = 15a_8 = 15 \times 8 = 120$. 故选 B.

3. B $\because \{a_n\}$ 的各项均为正数, $a_n \cdot a_{n+1} = a_n^2 = e^{2n}, n \geq 2$,

$\therefore a_1 a_3 = e^4$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = e^n, \therefore a_1 = \frac{e^4}{e^3} = e$,

$\therefore a_n = e^n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\therefore \ln a_n = \ln e^n = n$,

\therefore 数列 $\{\ln a_n\}$ 的前 20 项和 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times (1+20)}{2} = 210$.

解后反思 数列与对数运算的结合历来都是考查的重点, 本题中用到运算性质 $\log_a a^n = n (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 有些题目还经常用到运算性质 $\log_a m + \log_a n = \log_a (mn) (a > 0, \text{且 } a \neq 1, m > 0, n > 0)$.

4. C 用数学归纳法证明等式 $f(n) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}$ 时,

假设当 $n=k$ 时, 命题成立, 则 $f(k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k-2) = \frac{3k^2 - k}{2}$,

当 $n=k+1$ 时 $f(k+1) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k-2) + [3(k+1)-2] = f(k) + 3k + 1$,
 故需要用到的 $f(k+1)$ 与 $f(k)$ 之间的关系式是 $f(k+1) = f(k) + 3k + 1$. 故选 C.

5. C 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$,

$\therefore 4a_3, a_3, 2a_4$ 成等差数列, $\therefore 2a_3 = 4a_3 + 2a_4$,

$\therefore 2a_1 q^2 = 4a_1 q^2 + 2a_1 q^3$, 即 $2q^2 + q - 1 = 0$,

解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -1$ (舍).

\therefore 正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为

$$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{32}. \text{ 故选 C.}$$

6. C 因为等差数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别

$$\text{为 } S_n \text{ 和 } T_n, \text{ 所以 } \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2}(a_1 + a_{2n-1}) \cdot (2n-1)}{\frac{1}{2}(b_1 + b_{2n-1}) \cdot (2n-1)} = \frac{a_n}{b_n},$$

$$\text{又 } \frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+81}{n+3}, \text{ 所以 } \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{3 \times (2n-1) + 81}{2n-1+3} = \frac{3n+39}{n+1} = 3 + \frac{36}{n+1}.$$

因此要使 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数, 只需使 $\frac{36}{n+1}$ 为整数,

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n+1$ 是 36 的大于 1 的约数,

易知 36 的非 1 的正约数有 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, 共 8 个, 所以 n 的值有 1, 2, 3, 5, 8, 11, 17, 35, 共 8 个,

所以使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数为 8. 故选 C.

7. B **审题指导** 据题意, 第 9 对轧辊出口处斑点间距为轧辊周长, 在此出口处的两斑点间面带体积与最终出口处两斑点间面带体积相等, 因宽度不变, 可得到 $1600 = 0.8L_9$, 由此求出 L_9 , 结合 L_{10} , 进而求出 L_1 .

解题思路 每个轧辊的周长为 $2\pi r = 1600$ mm,

由题意可知第 9 对轧辊出口处斑点间距为轧辊周长,

因为在第 9 对轧辊出口处的两斑点间面带的体积与最终出口处两斑点间面带的体积相等, 面带的宽度不变,

所以 $1600 = 0.8L_9$, 所以 $L_9 = 2000$ mm, 又 $L_{10} = 1600$ mm, 所以数列 $\{L_k\}$ 是以 0.8 为公比的等比数列, 所以 $L_{10} = L_1 \cdot$

$$0.8^{10-k}, \text{ 即 } L_k = \frac{L_{10}}{0.8^{10-k}} = 1600 \times 0.8^{k-10} \text{ mm. 故选 B.}$$

8. B 由 $a_{n+2} + 4a_n = 5a_{n+1}$, 得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n)$,

因此数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 $a_2 - a_1 = 4$, 公比为 4 的等比数列,

$$\text{故 } a_{n+1} - a_n = 4^n, \text{ 则 } a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = 4^n + 4^{n-1} + \dots + 4 + 1 = \frac{4^{n+1} - 1}{3},$$

$$\therefore b_n = [\log_2 a_{n+1}] = \left[\log_2 \frac{4^{n+1} - 1}{3} \right],$$

易知 $\log_2(4^{n+1} - 1) - \log_2 3 < \log_2 4^{n+1} - 1 = 2n + 1$,

$$\log_2 \frac{4^{n+1} - 1}{3} > \log_2 \frac{(4-1) \times 4^n}{3} = 2n,$$



$$\therefore b_n = 2n, \therefore \frac{8100}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{8100}{2n \cdot (2n+2)} = 4050 \times \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right),$$

$$\text{令 } c_n = \frac{8100}{b_n \cdot b_{n+1}}, \text{ 则 } S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n = 4050 \times \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right], \therefore S_n = 2025 \times \left(1 - \frac{1}{n+1} \right),$$

将 $n=2025$ 代入, 得 $S_{2025} = 2025 - \frac{2025}{2026}$, 则 $[S_{2025}] = 2024$, 故选 B.

二、多项选择题

9.ACD 对于 A, 由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列及 $a_1 + a_2 > 0$, 可取 $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$, 所以 $a_2 + a_3 > 0$ 不成立;

对于 B, 由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 + a_3 < 0$, 得 $2a_2 = a_1 + a_3 < 0$, 所以 $a_2 < 0$ 恒成立;

对于 C, 由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 < a_2$, 可取 $a_1 = -3, a_2 = -2, a_3 = -1$, 所以 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$ 不成立;

对于 D, 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 得 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) = -d^2 \leq 0$, 所以无论 a_1 为何值, 均有 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \leq 0$, 所以若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$ 恒不成立. 故选 ACD.

10.BCD 由 $2(n+1)a_n = na_{n+1}$, 得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \times \frac{a_n}{n}$, 所以 $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = a_1 = 4$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 A 错误;

易得 $\frac{a_n}{n} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 所以 $a_n = n \cdot 2^{n+1}$, 显然 $\{a_n\}$ 为递增数列, 故 B 正确;

$$S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} \quad ①,$$

$$2S_n = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+2} \quad ②,$$

$$① - ② \text{ 得 } -S_n = 1 \times 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+2} = \frac{2^2 \times (1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+2},$$

2^{n+2} , 故 $S_n = (n-1) \times 2^{n+2} + 4$, 故 C 正确;

易得 $\frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}} = n$, 所以 $\left\{ \frac{a_n}{2^{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

11.ABD 对于 A 选项, 当 $-1 < k < 0$ 时, $0 < 1+k < 1$,

又因为 $P_0 > 0, P_n = P_0(1+k)^n$, 所以对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $P_n > 0$,

所以 $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_0(1+k)^{n+1}}{P_0(1+k)^n} = 1+k < 1$, 则 $P_{n+1} < P_n$,

故若在某一时期内 $-1 < k < 0$, 则这期间人口数呈下降趋势, A 选项正确;

对于 B 选项, 当 $k > 0$ 时, $1+k > 1$, 又因为 $P_0 > 0, P_n = P_0(1+k)^n$, 所以对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $P_n > 0$,

所以 $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_0(1+k)^{n+1}}{P_0(1+k)^n} = 1+k > 1$, 则 $P_{n+1} > P_n$, 故若在某一时期内 $k > 0$, 则这期间人口数呈上升趋势, B 选项正确;

对于 C 选项, 由对 B 选项的分析可知若在某一时期内 $0 < k < 1$, 则这期间人口数呈上升趋势, C 选项错误;

对于 D 选项, 当 $k=0$ 时, $P_n = P_0$, 故若在某一时期内 $k=0$, 则这期间人口数不变, D 选项正确. 故选 ABD.

12.ABD 审题指导 利用余弦定理得到 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{3} a_{n-1}$, 即可得

到数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为公比的等比数列, 即可判

断 A、B, 由 $b_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_n \times \frac{2}{3} a_n \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{18} a_n^2$ 求出 $\{b_n\}$ 的通项公式, 即可判断 C, 利用等比数列求和公式判断 D.

解题思路 由题意知 $a_1 = 3$, 在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理得

$$EF = \sqrt{AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos 60^\circ},$$

$$\text{则 } a_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{3} a_1 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} a_1 \right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} a_1 \times \frac{2}{3} a_1 \cdot \cos 60^\circ},$$

同理可得当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = \sqrt{\left(\frac{1}{3} a_{n-1} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} a_{n-1} \right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} a_{n-1} \times \frac{2}{3} a_{n-1} \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} a_{n-1},$$

易知 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为

公比的等比数列, 所以 $a_n = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1}$, 故 A 正确;

$$\text{易得 } a_2 = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^1 = \sqrt{3}, a_3 = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = 1,$$

所以从正三角形 ABC 开始, 连续 3 个正三角形面积之和为

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \frac{13\sqrt{3}}{4}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{由题意知 } b_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_1 \times \frac{2}{3} a_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{18} a_1^2, b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_2$$

$$\times \frac{2}{3} a_2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{18} a_2^2, \dots, b_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_n \times \frac{2}{3} a_n \cdot \sin 60^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{18} a_n^2, \text{ 又 } a_n = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{\sqrt{3}}{18} \left[3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1} \right]^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1},$$

显然数列 $\{b_n\}$ 单调递减,

$$\text{易知 } b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^1 = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{36} > \frac{1}{36},$$



$$b_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{2\sqrt{3}}{36} > \frac{1}{36}, b_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54} = \frac{2\sqrt{3}}{108} >$$

$$\frac{3}{108} = \frac{1}{36}, \text{故 C 错误;}$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] < \frac{3\sqrt{3}}{4} < \frac{3}{2}, \text{故 D 正确. 故选 ABD.}$$

三、填空题

13. 答案 $-\frac{1}{2}$

解题思路 由题意得 $a_4 + a_5 + a_6 = S_6 - S_3 = 6^2 + 3 \times 6 - 90 - (3^2 + 3 \times 3 - 90) = 36$, $a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = 3^2 + 3 \times 3 - 90 = -72$,

$$\text{则 } \frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_1 + a_2 + a_3} = -\frac{1}{2}.$$

14. 答案 18

解题思路 由等比数列的性质可得 $a_2 \cdot a_8 = a_5^2$,

又 $a_2 \cdot a_8 = 4a_5$, 所以 $a_5^2 = 4a_5$, 所以 $a_5 = 4$,

又 $b_4 + b_6 = a_5$, 所以 $b_4 + b_6 = 4$, 所以数列 $\{b_n\}$ 的前 9 项和 $S_9 = \frac{9(b_1 + b_9)}{2} = \frac{9(b_4 + b_6)}{2} = \frac{9 \times 4}{2} = 18$.

15. 答案 $\frac{n}{4n+4}$

解题思路 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由 $a_1 = 1, 2S_9 - 3S_6 = 54$,

$$\text{得 } 2 \times \frac{9(1+1+8d)}{2} - 3 \times \frac{6(1+1+5d)}{2} = 54, \text{解得 } d = 2,$$

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$,

$$\text{所以 } b_n = \frac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{4n+4}$.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{4n+4}.$$

16. 答案 10

审题指导 分别求出 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式, 代入 $a_m + (b_m - 27) = 2019$, 进而解方程求得 m .

解题思路 由题意知, $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$,

设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = S_n + S_{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^n + 2^{n-1} -$$

$$2(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\therefore a_m + (b_m - 27) = 2019, \therefore a_m + b_m = 2046.$$

$$\text{又 } \because a_m + b_m = 2^{m-1} + 2^n + 2^{n-1} - 2 = 2 \cdot 2^n - 2,$$

$$\therefore 2 \cdot 2^n - 2 = 2046, \text{解得 } m = 10.$$

四、解答题

17. **解题思路** (1) 易知 $a_n \neq 0$, $\therefore x = (a_{n+1}, -2), y = (1, a_n)$,

且 $x \perp y$,

$$\therefore x \cdot y = 0, \text{即 } a_{n+1} - 2a_n = 0, \text{即 } a_{n+1} = 2a_n,$$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,

$\therefore a_3 + 2$ 是 a_2 与 a_4 的等差中项,

$$\therefore 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4, \text{即 } 2 \times (2^2 a_1 + 2) = 2a_1 + 2^3 a_1, \text{解得 } a_1 = 2,$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n. \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = 2^n, \therefore \log_{\frac{1}{2}} a_n = \log_{\frac{1}{2}} 2^n = -n,$$

$$\therefore b_n = 13 + 2 \times (-n) = 13 - 2n,$$

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 是一个递减数列,

$$\text{且 } b_6 = 13 - 2 \times 6 = 1 > 0, b_7 = 13 - 2 \times 7 = -1 < 0,$$

$$\text{故 } S_n \text{ 的最大值为 } S_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36. \quad (10 \text{ 分})$$

18. **解题思路** (1) 因为 $2S_n = a_{n+1} - 1$, 所以 $2S_{n-1} = a_n - 1 (n \geq 2)$, 两式相减整理得 $a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$,

在 $2S_n = a_{n+1} - 1$ 中, 令 $n=1$, 则 $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$, 故 $a_2 = 3a_1$, 故

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 (n \in \mathbb{N}^*), \quad (2 \text{ 分})$$

则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列,

$$\text{所以 } a_n = 3^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*). \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) b_n = \frac{\log_3(a_1 a_2 \cdots a_n)}{n} = \frac{1}{n} [0 + 1 + \cdots + (n-1)] = \frac{1}{n} \cdot$$

$$\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{令 } b_n \leq \frac{5}{4}, \text{解得 } n \leq \frac{7}{2}, \text{所以当 } n=1, 2, 3 \text{ 时, } b_n < \frac{5}{4}, \text{当 } n \geq$$

$$4 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 时, } b_n > \frac{5}{4}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$T_m = \left| b_1 - \frac{5}{4} \right| + \left| b_2 - \frac{5}{4} \right| + \cdots + \left| b_m - \frac{5}{4} \right|$$

$$= -\left(b_1 - \frac{5}{4}\right) - \left(b_2 - \frac{5}{4}\right) - \left(b_3 - \frac{5}{4}\right) + \left(b_4 - \frac{5}{4}\right) + \cdots + \left(b_m - \frac{5}{4}\right)$$

$$= \left[\frac{5}{4} \times 3 - (b_1 + b_2 + b_3) \right] + \left[(b_4 + b_5 + \cdots + b_m) - \frac{5}{4} \times (m-3) \right]$$

$$= (b_4 + b_5 + \cdots + b_m) - (b_1 + b_2 + b_3) + \frac{5}{4} \times (6-m)$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{m-1}{2}\right) \cdot (m-3)}{2} - \left(0 + \frac{1}{2} + 1\right) + \frac{5}{4} \times (6-m)$$

$$= \frac{m^2 - 6m + 18}{4} (m > 3 \text{ 且 } m \in \mathbb{N}^*). \quad (12 \text{ 分})$$

19. **解题思路** (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 所以

$$a_3 > a_2,$$



$$\text{又} \begin{cases} a_1 a_4 = a_2 a_3 = 32, \\ a_1 + a_3 = 12, \end{cases} \text{所以} \begin{cases} a_2 = 4, \\ a_3 = 8, \end{cases}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\frac{a_3}{a_2} = 2$,

$$\text{所以 } a_n = a_2 \cdot 2^{n-2} = 4 \times 2^{n-2} = 2^n. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 证明: 结合 (1) 知 $b_n = \frac{1}{\log_2 2^{2n-1} \times \log_2 2^{2n+1}} =$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2},$$

易知 $\frac{1}{4n+2} > 0$, 所以 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{2}$, 所以 $T_n < \frac{1}{2}$. (12 分)

20. 解题思路 (1) 由 $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3$, 且 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列,

得 $a_{n+1} - a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n, \therefore a_n - a_{n-1} = n-1 (n \geq 2)$.

(2 分)

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) +$

$$a_1 = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

又 $a_1 = 1$ 也满足 $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2} (n \geq 2)$,

$$\text{所以 } a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2} (n \in \mathbb{N}^*). \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2^n} = \frac{n}{2^n},$$

$$T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad \text{①},$$

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{②}, \quad (8 \text{ 分})$$

①-②得

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n}{2^{n+1}},$$

(10 分)

$$\text{所以 } T_n = 2 \times \left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \quad (12 \text{ 分})$$

21. 解题思路 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意知

$$\begin{cases} 9^2 = a_1 \cdot a_{13}, \\ a_1 = 3, \end{cases} \therefore 81 = 3 \times (3 + 12d), \therefore d = 2.$$

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3 + 2 \times (n-1) = 2n+1$. (6 分)

(2) 选择条件①.

$$\text{结合 (1) 得 } b_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{3(2n+3)}, \quad (10 \text{ 分})$$

由 $45T_n \leq n$, 得 $\frac{45}{3(2n+3)} \leq 1$, 解得 $n \geq 6$,

\therefore 使 $45T_n \leq n$ 成立的 n 的最小值为 6. (12 分)

选择条件②.

结合 (1) 得 $b_n = (\sqrt{2})^{(2n+1)-1} + n = 2^n + n$.

$$\therefore T_n = (2^1 + 1) + (2^2 + 2) + \cdots + (2^n + n)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n)$$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} = 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

由 $T_n - 12 \geq 2b_n$ 化简整理得 $n^2 - 3n - 28 \geq 0$, 解得 $n \geq 7$,

\therefore 使 $T_n - 12 \geq 2b_n$ 成立的 n 的最小值为 7. (12 分)

22. 解题思路 (1) 因为 $S_n = n^2 a_n$ ①,

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}$ ②,

①-②可得 $a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$, 易知 $a_n \neq 0$, 整理可得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$$= \frac{n-1}{n+1} (n \geq 2), \text{ 则 } \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times$$

$$\frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1},$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{n(n+1)}, \text{ 又 } a_1 = 1, \text{ 所以当 } n \geq 2 \text{ 时 } a_n = \frac{2}{n(n+1)},$$

(5 分)

易知 $a_1 = 1$ 也符合 $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$$\text{为 } a_n = \frac{2}{n(n+1)} (n \in \mathbb{N}^*). \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意及 (1) 可得 } nb_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{即 } dn^2 + (2b_1 - d)n = n^2 + n,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} d = 1, \\ 2b_1 - d = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} d = 1, \\ b_1 = 1, \end{cases}$$

所以 $b_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 所以 $c_n = (-1)^n \cdot 2n$,

$$\text{所以 } M_n = -2 + 4 - 6 + 8 - \cdots + (-1)^n \cdot 2n. \quad (8 \text{ 分})$$

当 n 为奇数时, $M_n = -2 + (4-6) + (8-10) + \cdots + [(-1)^{n-1} \cdot$

$$2(n-1) + (-1)^n \cdot 2n] = -2 - 2 \times \frac{n-1}{2} = -n-1, \quad (10 \text{ 分})$$

当 n 为偶数时, $M_n = (-2+4) + (-6+8) + (-10+12) + \cdots +$

$$[(-1)^{n-1} \cdot 2(n-1) + (-1)^n \cdot 2n] = 2 \times \frac{n}{2} = n.$$

综上, $M_n = \begin{cases} -n-1, n \text{ 为奇数}, \\ n, n \text{ 为偶数}. \end{cases} \quad (12 \text{ 分})$

