

高一数学下学期学生自主测试 10 参考答案

一、1. C 2. B 3. B 4. C 5. C 6. D

7. **C** 【解析】取 BP 的中点为 O ，连接 OA, OC ，

因为 $PA \perp$ 平面 ABC ，而 $AB \subset$ 平面 ABC ，故 $PA \perp AB$ ，故 $OP = OA = OB$ 。

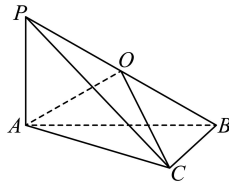
同理 $PA \perp BC$ ，而 $CA \perp BC$ ， $CA \cap PA = A, CA, PA \subset$ 平面 PAC ，

故 $BC \perp$ 平面 PAC ，而 $PC \subset$ 平面 PAC ，故 $BC \perp PC$ ，故 $OP = OC = OB$ ，

综上， O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，

而 $PB = \sqrt{PA^2 + CA^2 + CB^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$ ，故外接球的半径为 3，

故球的表面积为 $4\pi \times 9 = 36\pi$ ，故选：**C**



8. **C** 【详解】由于 P 在线段 CD 上（端点 C, D 除外）运动，且 $\angle CMD = 120^\circ$ ，

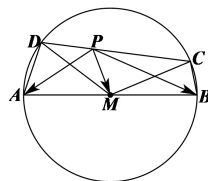
当 $MP \perp AB$ 时， $|MP|$ 取最小值，且 $|MP|_{\min} = 2 \cos 60^\circ = 1$ ，结合图形可知，

$|MP| < |CM| = 2$ ，所以， $1 \leq |MP| < 2$ ，

$\because M$ 为 AB 的中点， $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$ ， $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}$ ，

因此， $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{PM}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - 4 \in [-3, 0)$ 。

故选：**C**。



二、9. **BCD** 10. **ABD**

10 【解析】由图可知 $A = 2$ ， $f(0) = 2 \sin \varphi = 1$ ，所以 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ ，因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

则 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ，又 $f(\frac{1}{2}) = 2 \sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{6}) = 0$ ， $\omega < 0$ ，所以 $\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，则

$\omega = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，又 $\frac{T}{4} = -\frac{2\pi}{4\omega} > \frac{1}{2}$ ，所以 $-\pi < \omega < 0$ ，故 $\omega = -\frac{\pi}{3}$ ，

则 $f(x) = 2 \sin(-\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$ ，则 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 6$ ，故 **A** 正确；

由图象， $(\frac{1}{2}, 0)$ 是函数的一个对称中心，所以 $f(x) = f(1-x) = 0$ 成立，故 **B** 正确；

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，则 $f(x - \frac{1}{2}) = 2 \sin(-\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3})$ ，图象不关于原点对称，故 **C** 错误；

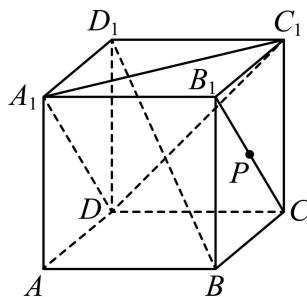
当 $x \in [0, 2]$ 时， $-\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ ，由正弦函数的单调性与复合函数单调性的判别方式可得 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减，故 **D** 正确；

11. **ACD** 【详解】对于 **A**，因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以 $A_1C_1 \perp BB_1$ ，因为 $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ， $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$ ， $B_1D_1, BB_1 \subset$ 平面 BB_1D_1 ，所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1 ，因为 $BD_1 \subset$ 平面 BB_1D_1 ，所以 $A_1C_1 \perp BD_1$ ，同理 $DC_1 \perp BD_1$ ，因为 $A_1C_1 \cap DC_1 = C_1$ ， $A_1C_1, DC_1 \subset$ 平面 A_1C_1D ，所以 $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ，所以 **A** 正确。

对于 **B**，当点 P 在点 B_1 时，因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以直线 BP 与 A_1C_1 所成的角为直角，

当点 P 在点 C 处时，因为 $BC \parallel B_1C_1$ ，所以 $\angle A_1C_1B_1$ 是直线 BP 与 A_1C_1 所成的角，此时 $\angle A_1C_1B_1 = 45^\circ$ ，

当点 P 不与 B_1 或 C 重合时，延长 DC 到 F ，使 $CF = DC$ ，连接 BF, PF ，过 P 作 $PG \perp BC$ 于点 G ，连接 FG ，因为 $AB \parallel CF$ ， $AB = CF$ ，所以四边形 $ABFC$ 为平行四边形，所



以 $AC \parallel BF$ ，因为 $AC \parallel A_1C_1$ ，所以 $A_1C_1 \parallel BF$ ，所以 $\angle PBF$ 为直线 BP 与 A_1C_1 所成的角，设正方体的棱长为 1， $PG = x$ ，则 $CG = x, BG = 1 - x$ ， $BF = \sqrt{2}$ 所以

$PB^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ ， $PF^2 = x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1$ ，所以

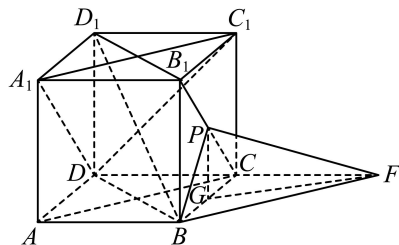
$$\cos \angle PBF = \frac{PB^2 + BF^2 - PF^2}{2PB \cdot BF} = \frac{2x^2 - 2x + 1 + 2 - 2x^2 - 1}{2\sqrt{2}\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2}}$$

因为 $0 < x < 1$ ，所以

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $0 < \cos \angle PBF < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，



$0^\circ < \angle PBF < 90^\circ$ ，所以 $45^\circ < \angle PBF < 90^\circ$ ，综上，直线 BP 与 A_1C_1 所成角的范围为 $[45^\circ, 90^\circ]$ ，所以不存在点 P ，使得直线 BP 与 A_1C_1 所成角为 30° ，所以 B 错误。

对于 C，因为 $B_1C \parallel A_1D$ ， $A_1D \subset$ 平面 A_1C_1D ， $B_1C \not\subset$ 平面 A_1C_1D ，所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D ，所以点 P 到平面 A_1C_1D 的距离为定值，因为 $\triangle A_1DC_1$ 的面积为定值，所以三棱锥 $P-A_1DC_1$ 的体积为定值，所以 C 正确。

对于 D，设平面 A_1C_1D 与平面 $ABCD$ 交于直线 l ，因为 $A_1C_1 \parallel$ 平面 $ABCD$ ， $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1D ，所以 $A_1C_1 \parallel l$ ，因为 $A_1C_1 \parallel AC$ ，所以 $AC \parallel l$ ，即平面 A_1C_1D 与底面 $ABCD$ 的交线平行于直线 AC ，所以 D 正确，故选：ACD

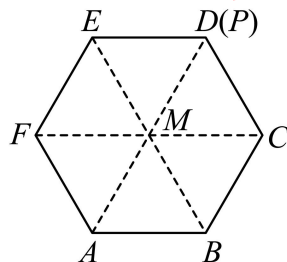
三、12. $\frac{4\pi}{3}$ 13. $\frac{3}{2}$

【解析】结合 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$ 以及正六边形的几何特征可知 M 为 AD 的中点，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP}) - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP}) - \frac{1}{2}$$

要使 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BP}$ 最大，可知当 P 在 D 处时， $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BP}$ 最大，此时 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 最大，



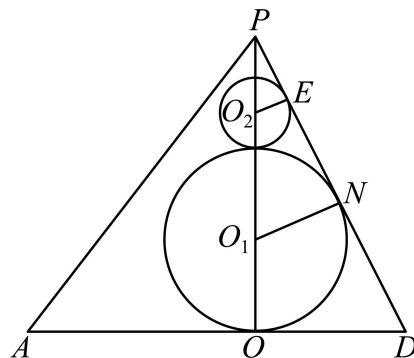
$$\text{即 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

14. $\frac{2\pi}{3}$ 【详解】依题意得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ ，

$$\text{底面 } ABC \text{ 的外接圆半径为 } 2r_1 = \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{点 } P \text{ 到平面 } ABC \text{ 的距离为 } d = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{所以 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$



$$\text{所以 } S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

设球 O_1 的半径为 R ，所以 $V_{P-ABC} = V_{O_1-PAB} + V_{O_1-PAC} + V_{O_1-PBC} + V_{O_1-ABC}$

$$\text{则 } \frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{3} \times 4) \cdot R, \text{ 得 } R = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{设球 } O_2 \text{ 的半径为 } r, \text{ 则 } \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{6}-R-r}{\sqrt{6}}, \text{ 又 } R = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 得 } r = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{所以球 } O_2 \text{ 的表面积为 } S = 4\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \right)^2 = \frac{2}{3}\pi$$

四、15. 【详解】 $\because z = 1 + mi, \therefore \bar{z} = 1 - mi$.

$$\therefore \bar{z} \cdot (3+i) = (1-mi)(3+i) = (3+m) + (1-3m)i.$$

又 $\because \bar{z} \cdot (3+i)$ 为纯虚数， $\therefore \begin{cases} 3+m=0 \\ 1-3m \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $m = -3$. $\therefore z = 1 - 3i$.

$$(1) z_1 = \frac{-3+2i}{1-i} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i, \therefore |z_1| = \frac{\sqrt{26}}{2};$$

$$(2) \because z = 1 - 3i, \therefore z_2 = \frac{a-i}{1-3i} = \frac{(a+3) + (3a-1)i}{10},$$

$$\text{又} \because \text{复数 } z_2 \text{ 所对应的点在第一象限}, \therefore \begin{cases} a+3 > 0 \\ 3a-1 > 0 \end{cases}, \text{ 解得: } a > \frac{1}{3}.$$

16. 【解】(1) 因为 $\cos 2A - 2\sin^2 B + 2\sin^2 C = 1 - 2\sin A \sin B$,

所以 $1 - 2\sin^2 A - 2\sin^2 B + 2\sin^2 C = 1 - 2\sin A \sin B$,

所以 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin B$,

$$\text{由正弦定理可得 } a^2 + b^2 - c^2 = ab, \text{ 由余弦定理可得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2},$$

因为 $C \in (0, \pi)$ ，所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - 3 \times \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2,$$

所以 $4 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$ ，所以 $a+b \leq 4$ ，当且仅当 $a=b=2$ 时取等号，

又 $a+b > c=2$ ，所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(2, 4]$.

$$17. \text{【详解】(I) } f(x) = 2\cos x(\sin x - \cos x) + 1 = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$$

因此，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

(II) 因为 $f(x) = \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right]$ 上为增函数，在区间 $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right]$ 上为减函数，

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2}, f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = -1,$$

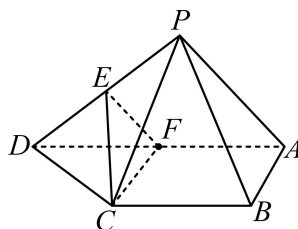
故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$ ，最小值为 -1 .

18. 【详解】(1) 如下图所示，连接 EF 、 CF ，

因为 E 、 F 分别为 PD 、 AD 的中点，所以 $EF \parallel PA$ ，

$\because EF \not\subset \text{平面 } PAB, PA \subset \text{平面 } PAB$ ，所以， $EF \parallel \text{平面 } PAB$ ，

又因为 $AD = 2BC$ ， F 为 AD 的中点，所以 $AF = BC$ ，



又 $AF \parallel BC$ ，所以四边形 $ABCF$ 是平行四边形， $\therefore CF \parallel AB$ ，
 $\because CF \not\subset$ 平面 PAB ， $AB \subset$ 平面 PAB ， $\therefore CF \parallel$ 平面 PAB ，
 又因为 $EF \subset$ 平面 CEF ， $CF \subset$ 平面 CEF ， $EF \cap CF = F$ ，
 所以平面 $CEF \parallel$ 平面 PAB ；

(2) 连接 AC 、 BD ，设 $AC \cap BD = O$ ，连接 OE ，
 因为 $PB \parallel$ 平面 CEA ， $PB \subset$ 平面 PDB ，

平面 $CEA \cap$ 平面 $PDB = OE$ ， $\therefore OE \parallel PB$ ，所以 $\frac{PE}{ED} = \frac{BO}{OD}$ 。

在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$ ，

又 $AD = 2BC$ ，所以 $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\frac{PE}{ED} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{3}$ ，

所以 E 为线段 PD 上靠近 P 点的三等分点。

19. 【解】(1) 因为 $BC \parallel AE$ 且 $BC = AE$ ，所以四边形 $BCEA$ 为平行四边形，
 则 $AB \parallel EC$ ，又 $AB \not\subset$ 平面 PCE ， $EC \subset$ 平面 PCE ，
 所以 $AB \parallel$ 平面 PCE ；

(2) 由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，得 $PA \perp BD$ ，
 连接 BE ，由 $BC \parallel DE$ 且 $BC = DE$ ，
 所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形，又 $DE \perp CD$ ， $BC = CD = 2$ ，
 所以平行四边形 $BCDE$ 为正方形，所以 $BD \perp EC$ ，
 又 $AB \parallel EC$ ，所以 $BD \perp AB$ ，又 $PA \cap AB = A$ ， PA 、 $AB \subset$ 平面 PAB ，
 所以 $BD \perp$ 平面 PAB ，由 $BD \subset$ 平面 PBD ，
 所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAB ；

(3) 由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PA \perp CD$ ，
 又 $CD \perp AD$ ， $PA \cap AD = A$ ， PA 、 $AD \subset$ 平面 PAD ，
 所以 $CD \perp$ 平面 PAD ，又 $PD \subset$ 平面 PAD ，所以 $CD \perp PD$ ，
 故 $\angle PDA$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角，即 $\angle PDA = 45^\circ$ ，
 在 $Rt\triangle PAD$ 中， $PA = AD = 4$ ，作 $AM \perp PD$ ，垂足为 M ，
 由(2)知，平面 $PBD \perp$ 平面 PAB ，平面 $PBD \cap$ 平面 $PAB = PB$ ， $AM \subset$ 平面 PAB ，

所以 $AM \perp$ 平面 PBD ，则 PM 为直线 AP 在平面 PBD 上的投影，
 所以 $\angle APM$ 为直线 AP 与平面 PBD 所成的角，

在 $Rt\triangle PAB$ 中， $AB = CE = 2\sqrt{2}$ ， $PA = 4$ ， $PB = 2\sqrt{6}$ ，所以 $AM = \frac{PA \cdot AB}{PB} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

在 $Rt\triangle AMP$ 中， $\sin \angle APM = \frac{AM}{AP} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

即直线 AP 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

