

数学自主测验 9 答案

1. C 2. D 3. B 4. C 5. A 因为 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3}$,

因为函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上有 2 个零点, 所以 $2\pi \leq \frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3} < 3\pi$, 解得 $\frac{5}{2} \leq \omega < 4$,

6. A 设 $d = A \sin(\omega t + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 由题意可知, $d_{\max} = A + b = 6$, $d_{\min} = A - b = -2$, 解

得 $A = 4$, $b = 2$, 函数 $d = 4 \sin(\omega t + \varphi) + 2$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 $T = \frac{60}{1.5} = 40$,

则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$, 当 $t = 0$ 时, $d = 4 \sin \varphi + 2 = 0$, 可得 $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$, 又因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$,

7. B 8. 因为 PA, PB, PC 两两互相垂直且长度均为 6, 所以 $\triangle ABC$ 为圆锥底面圆的内接正三角形, 且边

长 $AB = BC = CA = 6\sqrt{2}$, 由正弦定理得底面圆的半径 $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{6}$,

所以圆锥的高 $PO = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$.

如图, 圆锥轴截面三角形的内切圆半径即为圆锥内切球半径 r ,

轴截面三角形面积为 $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} (6 + 6 + 4\sqrt{6}) \cdot r$, 所以内切球的半径 $r = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$.

内切球的表面积为 $4\pi(6\sqrt{2} - 4\sqrt{3})^2 = 4\pi(120 - 48\sqrt{6})$, 圆锥的侧面积为

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}\pi$, 所以其和为 $60(8 - 3\sqrt{6})\pi$.

9. ABD 10. BCD 对于 A, 由 $z + \bar{z} = 0$, 得 $\frac{\bar{z}}{z} = -1$, 则 A 错误. 对于 B, 因为 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, 所以 $|z|^2 = 2|z|$,

解得 $|z| = 2$ 或 $|z| = 0$ (舍去), 则 B 正确. 对于 C, 设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, 且 $ab \neq 0$), 则 $z_1 = \bar{z} = a - bi$, 所以

$\bar{z}_1 = a + bi = z$, 则 C 正确. 对于 D, 由 $|z + z_1| = 0$, 得 $z_1 = -z$. 设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, 且 $ab \neq 0$), 则

$z_1 \cdot \bar{z} = -z \cdot \bar{z} = -(a^2 + b^2)$, $|z|^2 = a^2 + b^2$, 从而 $z_1 \cdot \bar{z} + |z|^2 = 0$, 则 D 正确.

11. ACD 【详解】对于选项 A, 由正方体性质, 易得 $B_1C \perp BC_1, B_1C \perp AB$, 因

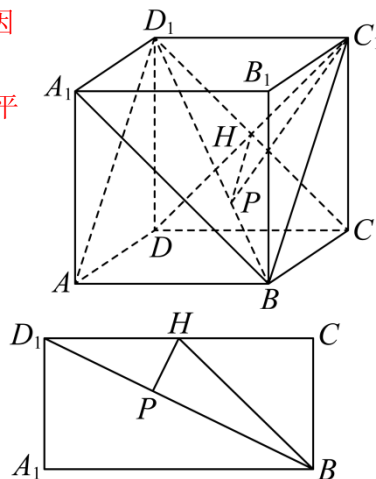
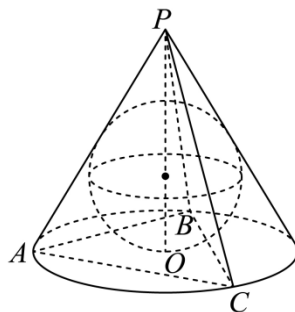
为 $AB \cap BC_1 = B, AB, BC_1 \subset \text{平面 } ABC_1D_1$, 所以 $B_1C \perp \text{平面 } ABC_1D_1$. 因为 $AP \subset \text{平}$

面 ABC_1D_1 , 所以 $AP \perp B_1C$, 故 A 正确;

对于选项 B, 当 P 与 B 重合, 则此时 PD 与 BC 夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 B 错误;

对于选项 C, 如图连接 DC_1 交 D_1C 于 H ,

因为 $BC \perp \text{平面 } CC_1D_1D, DC_1 \subset \text{平面 } CC_1D_1D$, 所以 $BC \perp DC_1$. 因为



$CD_1 \perp DC_1, BC \cap CD_1 = C, BC, CD_1 \subset \text{平面 } A_1BCD_1$, 所以 $DC_1 \perp \text{平面 } A_1BCD_1$, 即 $C_1H \perp \text{平面 } A_1BCD_1$,

所以 $\angle C_1PH$ 为直线 PC_1 与平面 A_1BCD_1 所成角, 所以 $\tan \angle C_1PH = \frac{C_1H}{PH} = \frac{\sqrt{2}}{PH}$. 所以当 HP 最小时 $\angle C_1PH$ 最大,

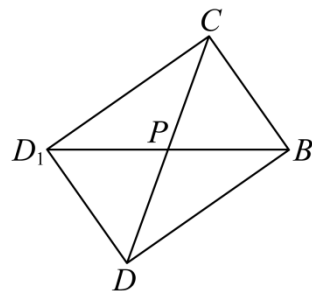
即 $HP \perp BD_1$ 时, HP 最小. 由 $BD_1 \cdot HP = BC \cdot CD_1$, 可得 $HP = \frac{BC \cdot HD_1}{BD_1} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

此时 $\tan \angle C_1PH = \frac{C_1H}{PH} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$, 故 $\angle C_1PH$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$, 故 C 正确;

对于选项 D, 如图, 将平面 D_1DB 与平面 D_1BC 沿 D_1B 翻折到同一个平面内

由题意, $D_1B = 2\sqrt{3}, BD = 2\sqrt{2}, DD_1 = 2, BC = 2, D_1C = 2\sqrt{2}$,

从而 $D_1C = DB, DD_1 = BC$, 故 DD_1CB 为平行四边形. 又 $\angle D_1CB = \angle D_1DB = \frac{\pi}{2}$, 故



DD_1CB 为矩形. 从而当 P 为 CD 与 BD_1 交点时, $PC + PD$ 最小, 此时 $PC + PD = CD = BD_1 = 2\sqrt{3}$, 故 D 正确.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分.

12. $2 + \sqrt{2} / \sqrt{2} + 2$ 13. -1 $\frac{2\pi}{3}$ 【详解】因为 $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (2\vec{a} + \vec{b})$, 所以

$(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$, 即 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2}$, 又 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}| \cdot 2|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

14. 在线段 A_1D 上

四、解答题: 本题共 5 小题, 共计 77 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$. (2) $\because \vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 0$,

$\therefore \sin \alpha = -\sqrt{3} \cos \alpha$, (显然 $\cos \alpha \neq 0$, 否则 $\sin \alpha = 0$ 与 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 矛盾) $\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{3}$

$\because \alpha \in (0, \pi)$, $\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$. $\because \frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \frac{\pi}{6} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$.

$\because \vec{a} \cdot \vec{c} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$, $\therefore \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, $\therefore \cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

$\therefore \sin \beta = \sin[\alpha - (\alpha - \beta)] = \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$.

16. 【详解】(1) 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin D}$,

所以 $AD \cdot \sin D = AC \cdot \sin \angle ACD$, 又 $AD \cdot \sin D = \sqrt{3}AC \cdot \cos \angle ACD$,

所以 $AC \cdot \sin \angle ACD = \sqrt{3}AC \cdot \cos \angle ACD$, 因为 $\cos \angle ACD \neq 0$, 所以 $\tan \angle ACD = \sqrt{3}$.

因为 $0 < \angle ACD < \pi$, 所以 $\angle ACD = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle BAC = \angle ACD = \frac{\pi}{3}$. 因为 AE 平分 $\angle BAC$, 所以 $\angle BAE = \angle CAE = \frac{\pi}{6}$.

因为 $S_{\triangle BAE} + S_{\triangle CAE} = S_{\triangle BAC}$, 所以 $\frac{1}{2}AB \cdot AE \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}AC \cdot AE \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \frac{\pi}{3}$,

又 $AB = \sqrt{3}$, $AE = 1$, 所以 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}AC \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}AC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, 所以 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$,

17. (1)解 由已知 $AD \parallel BC$, 故 $\angle DAP$ 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角.

$\because AD \perp$ 平面 PDC , $PD \subset$ 平面 PDC , $\therefore AD \perp PD$. 在 $Rt\triangle PDA$ 中, 由已知, 得 $AP = \sqrt{AD^2 + PD^2} = \sqrt{5}$,

故 $\cos \angle DAP = \frac{AD}{AP} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. \therefore 异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)证明 $\because AD \perp$ 平面 PDC , 直线 $PD \subset$ 平面 PDC , $\therefore AD \perp PD$.

又 $\because BC \parallel AD$, $\therefore PD \perp BC$,

又 $PD \perp PB$, $BC \cap PB = B$, $BC, PB \subset$ 平面 PBC , $\therefore PD \perp$ 平面 PBC .

(3)解 过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F , 连接 PF ,

则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角.

$\because PD \perp$ 平面 PBC , 故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影,

$\therefore \angle DFP$ 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角.

由于 $AD \parallel BC$, $DF \parallel AB$, 可得 $BF = AD = 1$.

由已知, 得 $CF = BC - BF = 2$. 又 $AD \perp DC$, 故 $BC \perp DC$.

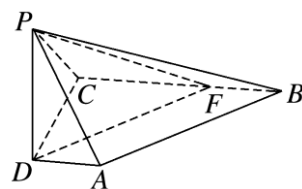
在 $Rt\triangle DCF$ 中, 可得 $DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = 2\sqrt{5}$.

18. 【详解】(1) 猜想: $\overrightarrow{CD} = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}$,

证明: 因为 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$

$= (1-\lambda)\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$, 因为 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 所以 $\overrightarrow{CD} = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 4分

(2) ①若 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$, 则 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,



因为 A 、 O 、 M 三点共线，设 $\overrightarrow{AO} = t\overrightarrow{AM}$ ，则 $\overrightarrow{CO} = (1-t)\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CM} = (1-t)\overrightarrow{CA} + t \times \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b}$ ，

因为 B 、 O 、 N 三点共线，设 $\overrightarrow{BO} = \mu\overrightarrow{BN}$ ，则 $\overrightarrow{CO} = (1-\mu)\overrightarrow{CB} + \mu\overrightarrow{CN} = (1-\mu)\overrightarrow{CB} + \mu \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{\mu}{2}\vec{a} + (1-\mu)\vec{b}$ ，

因为 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线，所以 $\begin{cases} 1-t = \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{3}t = 1-\mu \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ \mu = \frac{4}{5} \end{cases}$ ，所以 $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$ 。

②因为 $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA}$ ， $\overrightarrow{CQ} = y\overrightarrow{CB}$ ($x > 0, y > 0$)，所以 $\vec{a} = \frac{1}{x}\overrightarrow{CP}$ ， $\vec{b} = \frac{1}{y}\overrightarrow{CQ}$ ，所以 $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} = \frac{2}{5x}\overrightarrow{CP} + \frac{1}{5y}\overrightarrow{CQ}$ ，

因为 P 、 O 、 Q 三点共线，所以 $\frac{2}{5x} + \frac{1}{5y} = 1$ ，所以 $x + y = (x + y) \left(\frac{2}{5x} + \frac{1}{5y} \right) = \frac{3}{5} + \frac{x}{5y} + \frac{2y}{5x}$ ，

因为 $x > 0, y > 0$ ，所以 $\frac{x}{5y} > 0$ ， $\frac{2y}{5x} > 0$ ，

所以 $\frac{3}{5} + \frac{x}{5y} + \frac{2y}{5x} \geq \frac{3}{5} + 2\sqrt{\left(\frac{x}{5y}\right) \cdot \left(\frac{2y}{5x}\right)} = \frac{3+2\sqrt{2}}{5}$ ，当且仅当 $\begin{cases} \frac{2}{5x} + \frac{1}{5y} = 1 \\ \frac{x}{5y} = \frac{2y}{5x} \end{cases}$ 时，即 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}+2}{5} \\ y = \frac{\sqrt{2}+1}{5} \end{cases}$ 时，等号成立，

所以 $x + y$ 的最小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$ 15 分

19. (1) 连接 AC 交 BD 于点 O ，连接 OP ，

$\because BD \parallel$ 平面 $AMHN$ ，且平面 $PBD \cap$ 平面 $AMHN = MN$ ， $BD \subset$ 平面 PBD ，

$\therefore BD \parallel MN$ 。 $\because MN \perp PC$ ， $\therefore BD \perp PC$ ， \because 四边形 $ABCD$ 为菱形， \therefore

$BD \perp AC$ ， $OB = OD$ ， $\because PC \cap AC = C$ ，且 $PC, AC \subset$ 平面 PAC ，

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC ，又 $PO \subset$ 平面 PAC ， $\therefore BD \perp PO$ ， $\therefore PB = PD$ 。

(2) $\because PA = PC$ ，且 O 为 AC 中点， $\therefore OP \perp AC$ ，由 (1) 得 $OP \perp BD$ ，

$\because BD \cap AC = O$ ， $BD, AC \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore OP \perp$ 平面 $ABCD$ ，令 $AB = 2$ ，又四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，

$\therefore AC \perp BD$ ， $\therefore AO = \sqrt{3}$ ， $BO = 1$ 。 $\because AO \perp BD, AO \perp PO, PO \cap BD = O$ ，且都在平面 PBD 内，

$\therefore AO \perp$ 平面 PBD ，又 PA 与平面 PBD 所成角为 60° ， $\therefore \angle APO = 60^\circ$ ， $\angle PAC = 30^\circ$ ， $\therefore OP = \frac{\sqrt{3}}{3}AO = 1$ ，

$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot OP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 又 H 为 PC 中点，且 $PA = PC = 2$ ， $\therefore PH = \frac{1}{2}PC = 1$ ，在 $\triangle PAC$ 中，记

$AH \cap OP = G$ ，易知点 G 在 MN 上，且点 G 为 $\triangle PAC$ 重心， $\frac{PG}{PO} = \frac{2}{3}$ ，

又 $\because MN \parallel BD$ ， $\therefore MN = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}$ ，

由 (1) 知 $BD \perp$ 平面 PAC ， $\therefore MN \perp$ 平面 PAC ，

又 $S_{\triangle APH} = \frac{1}{2}PA \cdot PH \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore V_1 = 2V_{M-APH} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle APH} \cdot MN = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ，

$\therefore V_2 = V_{P-ABCD} - V_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ， $\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ 17 分

